ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ)

ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $x\in[0,+\infty)$ όπου $\alpha\in(0,1)$ σταθερός.

α) Να δειχθεί ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $[0, +\infty)$

β) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=2.

γ) Να βρείτε το $\kappa\in(0,2)$ ώστε η ευθεία x=κ να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ και $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$.

Αφού $\alpha\in(0,1)$ έχουμε $\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}<0$ για κάθε $x\in(0, +\infty)$.

Άρα $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(0, +\infty)$ και αφού f συνεχής στο $[0, +\infty)$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη) στο $[0, +\infty)$

β) Η f είναι συνεχής στο [0,2] και για κάθε $x\in[0,2]$ ισχύει $f(x)\geq 0$.

Άρα $E(\Omega)=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 x^{\alpha}\,dx=\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^2=\frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\frac{0^{\alpha+1}}{\alpha+1}=\frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ τ.μ.

γ) $E(\Omega_1)=\int_0^k f(x)dx=\int_0^k x^{\alpha}\,dx=\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^k=\frac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ τ.μ. είναι το εμβαδό του χωρίου Ω_1 που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=k, με $k\in(0,2)$.

Η ευθεία x=k , $k\in(0,2)$ χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία αν και μόνο ισχύει:

$E(\Omega_1)=\frac{1}{2}$

Ε(Ω) $\Leftrightarrow \dfrac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Leftrightarrow k^{\alpha+1}=2^{\alpha} \Leftrightarrow k=(2^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha+1}} \Leftrightarrow k=2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\in(0,2)$ δεκτή.

Άρα $k=2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$