Άσκηση 1η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=10\cdot S\cdot x^2+\bar{x}\cdot x+11,\ x\in R$ όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και $S>0$ η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων ενός δείγματος μεγέθους ν. Αν η εφαπτομένη της καμπύλης f στο σημείο της $A(-1,f(-1))$ είναι παράλληλη προς στον άξονα $x'x$ τότε:

α. Να βρείτε την $f'(x)$.

β. Να δείξετε ότι το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο.

δ. Αν η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 1 τότε:

ι) να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων του δείγματος.

ιι) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο Α αυτής.

Λύση

α. Παραγωγίζουμε την συνάρτηση ως προς $x\in R$. Είναι $f'(x)=20Sx+\bar{x}$.

β. Αφού η εφαπτομένη της καμπύλης f στο σημείο της $A(-1,f(-1))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ έχουμε $f'(-1)=0\Leftrightarrow 20S\cdot(-1)+\bar{x}=0\Leftrightarrow \bar{x}=20S>0$ (1) οπότε ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV=\frac{S}{\bar{x}}100\%=\frac{S}{20S}100\%=5\%$ άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ. $f'(x)=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}20Sx+20S=0\Leftrightarrow 20(x+1)=0\Leftrightarrow x=-1$ θέση πιθανού ακρότατου.

Μελετάμε το πρόσημο της $f'(x)$. Έχουμε $f'(x)<0\Leftrightarrow x<-1$ και $f'(x)>0\Leftrightarrow x>-1$. Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και η f γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$ άρα στο $x=-1$ παρουσιάζει ελάχιστο το

$$f(-1)=10S(-1)^2+\bar{x}(-1)+11=10S-\bar{x}+11\overset{10S=\frac{\bar{x}}{2}}{=}\frac{\bar{x}}{2}-\bar{x}+11=11-\frac{\bar{x}}{2}.$$

δ. Αφού η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 1 $f(-1)=1\Leftrightarrow 11-\frac{\bar{x}}{2}=1\Leftrightarrow 22-\bar{x}=2\Leftrightarrow \bar{x}=20$ και τότε από την $(1)\Leftrightarrow 20=20S\Leftrightarrow S=1$.

ε. Είναι $A(-1,1)$ και $\lambda=f'(-1)=0$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f είναι $y=1$.

Άσκηση 2η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$ και ο δειγματικός χώρος Ω που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Θεωρούμε Α και Β δυο ενδεχόμενα του Ω για τα οποία ισχύει $P[(A\cup B)']=\frac{11}{16}$,$P(A)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ και $P(B)=\kappa$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να αποδείξετε ότι $P(A)=\frac{1}{24}$.

γ. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A\cup B)$.

δ. Να βρείτε την τιμή του κ έτσι ώστε τα ενδεχόμενα Α και Β να είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους.

Λύση

α.Παίρνουμε τους περιορισμούς: $x^2-4\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm 2$ και $x+7\geq 0\Leftrightarrow x\geq -7$ άρα το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $A=[-7,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

β. Έχουμε: $P(A)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}\left(=\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{x+7}+3)}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-3^2}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$

$$=\frac{1}{(2+2)\left(\sqrt{2+7}+3\right)}=\frac{1}{24}.$$

γ. Είναι $P(A\cup B)=1-P[(A\cup B)']=1-\frac{11}{16}=\frac{5}{16}$.

δ. Για να είναι ασυμβίβαστα πρέπει

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Leftrightarrow\frac{5}{16}=\frac{1}{24}+\kappa\Leftrightarrow\kappa=\frac{5}{16}-\frac{1}{24}\Leftrightarrow\kappa=\frac{13}{48}.$$

Άσκηση 3η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3e^{2\alpha x}+7$.

α. Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες $f'(x)-f''(x)=0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β. Να βρεθεί συναρτήσει του α, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$.

γ. Για $\alpha>0$ να βρείτε τα σημεία τομής A και B της εφαπτομένης ευθείας με τον άξονα $y'y$ και τον άξονα $x'x$ αντίστοιχα.

δ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AOB που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες για $\alpha=\frac{1}{3}$.

Λύση

Είναι $f'(x)=\left(-3e^{2\alpha x}+7\right)'=-3\left(e^{2\alpha x}\right)'=-3(2\alpha x)'e^{2\alpha x}=-6\alpha e^{2\alpha x}$ και

$$f''(x)=\left(-6\alpha e^{2\alpha x}\right)'=-6\alpha(2\alpha x)'e^{2\alpha x}=-12\alpha^2e^{2\alpha x}.$$

α.

$$f'(x)-f''(x)=0\Leftrightarrow-6\alpha e^{2\alpha x}-12\alpha^2e^{2\alpha x}=0\Leftrightarrow-6e^{2\alpha x}\left(\alpha+2\alpha^2\right)=0\overset{-6e^{2\alpha x}\neq 0}{\Leftrightarrow}\alpha(1+2\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=\begin{cases}0\\ \acute{\eta}\\ -\frac{1}{2}\end{cases}$$

β. Έστω $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης. Είναι $\lambda=f'(0)=-6\alpha e^{2\cdot\alpha\cdot 0}=-6\alpha\cdot 1=-6\alpha$. Είναι $f(0)=-3e^{2\cdot\alpha\cdot 0}+7=-3\cdot 1+7=4$. Επειδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης διέρχεται από το σημείο $(0,4)$ θα έχουμε $4=-6\alpha\cdot 0+\beta\Leftrightarrow\beta=4$. Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=-6\alpha x+4$.

γ. Θα βρούμε τα σημεία τομής της εφαπτομένης ευθείας με τους άξονες $y'y$ και $x'x$. Για $x=0$ έχουμε $y=-6\alpha\cdot 0+4\Leftrightarrow y=4$ δηλαδή τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $A(0,4)$

Για $y=0$ έχουμε $0=-6\alpha x+4\Leftrightarrow x=\frac{2}{3\alpha}$ δηλαδή τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $B\left(\frac{2}{3\alpha},0\right)$.

δ. Είναι $(AOB)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2}{3\alpha}=\frac{2}{3\alpha}$ τ.μ. δηλαδή $(AOB)=E(\alpha)=\frac{2}{3\alpha}$ και

$$E'(\alpha)=\left(\frac{2}{3\alpha}\right)'=-\frac{6}{9\alpha^2}\text{ οπότε }E'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{6}{9\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{6}{9\cdot\frac{1}{9}}=-6\text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 4η
Στο γραφείο των καθηγητών ενός λυκείου υπάρχουν συνολικά 40 στυλό από τα οποία τα 20 έχουν μπλε μελάνι, τα 10 μαύρο και τα υπόλοιπα κόκκινο ή πράσινο. Επιλέγουμε ένα στυλό στην τύχη. Η πιθανότητα να έχει κόκκινο μελάνι είναι $P(K)=\frac{x}{3x+4}$, ενώ η πιθανότητα το στυλό να έχει πράσινο μελάνι είναι $P(\Pi)=\frac{x-1}{9x+2}$ με $x\in N$.
α. Να δείξετε ότι $x=2$
β. Για $x=2$ να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(K)$ και $P(\Pi)$.
γ. Να βρείτε το πλήθος των στυλό με κόκκινο και πράσινο μελάνι που υπάρχουν στο γραφείο των καθηγητών.

Λύση
Θεωρούμε αρχικά τα ενδεχόμενα:
ΜΠ={το στυλό που θα επιλεγεί να έχει μελάνι μπλε χρώματος}
Μ={το στυλό που θα επιλεγεί να έχει μελάνι μαύρου χρώματος}
Κ={το στυλό που θα επιλεγεί να έχει μελάνι κόκκινου χρώματος}
Π={το στυλό που θα επιλεγεί να έχει μελάνι πράσινου χρώματος}
Είναι $P(M\Pi)=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$, $P(M)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$, $P(K)=\frac{x}{3x+4}$, $P(\Pi)=\frac{x-1}{9x+2}$.
α. Επειδή το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των στοιχειωδών ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου είναι ίσο με 1 έχουμε: $P(M\Pi)+P(M)+P(K)+P(\Pi)=1\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{x}{3x+4}+\frac{x-1}{9x+2}=1\Leftrightarrow\frac{x(9x+2)+(x-1)(3x+4)}{(3x+4)(9x+2)}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{12x^2+3x-4}{27x^2+42x+8}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 48x^2+12x-16=27x^2+42x+8\Leftrightarrow 21x^2-30x-24=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{4}{7}\\ x=2\end{cases}.$$

Η τιμή $x=-\frac{4}{7}$ απορρίπτεται γιατί $x\in N$ άρα $x=2$.
β. Για $x=2$ έχουμε $P(K)=\frac{2}{3\cdot2+4}=\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$, $P(\Pi)=\frac{2-1}{9\cdot2+2}=\frac{1}{20}$.
γ. Είναι $P(K)=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{N(K)}{40}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow N(K)=8$ και $P(\Pi)=\frac{1}{20}\Leftrightarrow\frac{N(\Pi)}{40}=\frac{1}{20}\Leftrightarrow N(\Pi)=2$.

Άσκηση 5η
Οι χρόνοι που χρειάστηκαν 7 μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα στατιστικής ήταν:
6, 3, x, 2, 1, 2, 4 σε λεπτά, x θετικός πραγματικός αριθμός.
α. Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων δίνεται από την συνάρτηση $S^2(x)=\frac{6x^2-36x+166}{49}$.
β. Να βρείτε την τιμή του x, ώστε οι παρατηρήσεις να έχουν όσο γίνεται μικρότερη διασπορά.
γ. Αν το x παίρνει τιμές από το σύνολο $\Omega=\{1,2,3,...50\}$ να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α={ Η τυπική απόκλιση είναι μικρότερη από $\frac{\sqrt{166}}{7}$ }.

Λύση
5.α. Γνωρίζουμε ότι $S^2=\frac{1}{v}\{\sum t_i^2-\frac{(\sum t_i)^2}{v}\}\Leftrightarrow S^2=\frac{\sum t_i^2}{v}-\left(\frac{\sum t_i}{v}\right)^2$ (1).

Με εφαρμογή της (1) έχουμε:

$$S^2=\frac{6^2+3^2+x^2+2^2+1^2+2^2+4^2}{7}-\left(\frac{6+3+x+2+1+2+4}{7}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$S^2=\frac{x^2+70}{7}-\left(\frac{x+18}{7}\right)^2\Leftrightarrow S^2=\frac{x^2+70}{7}-\frac{x^2+36x+324}{49}\Leftrightarrow$$

$$S^2=\frac{7x^2+490-x^2-36x-324}{49}\Leftrightarrow S^2=\frac{6x^2-36x+166}{49}$$

δηλαδή $S^2=S^2(x)=\dfrac{6x^2-36x+324}{49}$.

β. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=S^2(x)=\dfrac{6x^2-36x+324}{49}$. Θα αναζητήσουμε την τιμή του x για την οποία η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο. Έχουμε $f'(x)=\dfrac{12x-36}{49}$.

Βρίσκουμε αρχικά τις θέσεις των πιθανών ακρότατων λύνοντας την εξίσωση $f'(x)=0$.

Έχουμε: $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{12x-36}{49}=0\Leftrightarrow 12x=36\Leftrightarrow x=3$. Εξετάζουμε το πρόσημο της $f'(x)$.

$f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{12x-36}{49}>0\Leftrightarrow x>3$ ενώ $f'(x)<0\Leftrightarrow\dfrac{12x-36}{49}<0\Leftrightarrow x<3$. Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$ και για x=3 η f παρουσιάζει ελάχιστο. Τα συμπεράσματα συνοψίζονται στον διπλανό πίνακα μονοτονίας-ακροτάτων.

x	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

γ. Έχουμε:

$$S<\frac{\sqrt{166}}{7}\Leftrightarrow S^2<\frac{166}{49}\Leftrightarrow\frac{6x^2-36x+166}{49}<\frac{166}{49}\Leftrightarrow$$

$$\frac{6x^2-36x}{49}<0\Leftrightarrow 6x^2-36x<0\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\in(0,6)$$

Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου Α είναι $N(A)=5$ γιατί Α={1,2,3,4,5} ενώ το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω είναι $N(\Omega)=50$. Έτσι $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{5}{50}=\dfrac{1}{10}$.

Άσκηση 6η

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ και $g(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+7x+10}$ και τα ενδεχόμενα Α και Β του δειγματικού χώρου Ω για τα οποία υποθέτουμε ότι: $P(A)=\lim\limits_{x\to 9}f(x)$ και $P(B)=\lim\limits_{x\to -2}g(x)$ και $P(A\cap B)=g'(1)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f, g και να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης g.

β. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(A\cap B)$.

γ. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A\cup B)$.

δ. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου: «πραγματοποιείται ένα μόνο από τα Α και Β».

Λύση

α. Για την συνάρτηση f πρέπει $x-9\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 9$ ενώ για την συνάρτηση g πρέπει $x^2+7x+10\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -5$ και $x\neq -2$. Έτσι $A_f = R-\{9\}$ και $A_g = R-\{-5,-2\}$. Ο τύπος της συνάρτησης g γράφεται: $g(x)=\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+5)}=\frac{x+3}{x+5}$.

β. Είναι

$$P(A)=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\left(=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}.$$

$$P(B)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^2+7x+10}\left(=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{x+3}{x+5}=\frac{1}{3}\ .$$

Για τον υπολογισμό της $P(A\cap B)$ βρίσκουμε αρχικά την παράγωγο της συνάρτησης g.

$$g'(x)=\frac{(x^2+5x+6)'(x^2+7x+10)-(x^2+5x+6)(x^2+7x+10)'}{(x^2+7x+10)^2}=$$

$$=\frac{(2x+5)(x^2+7x+10)-(x^2+5x+6)(2x+7)}{(x^2+7x+10)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+14x^2+20x+5x^2+35x+50-2x^3-7x^2-10x^2-35x-12x-42}{(x^2+7x+10)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+8x+8}{(x^2+7x+10)^2}$$

άρα $P(A\cap B)=g'(1)=\frac{2\cdot 1+8\cdot 1+8}{(1^2+7\cdot 1+10)^2}=\frac{18}{18^2}=\frac{1}{18}$.

γ. Από τον προσθετικό νόμο έχουμε : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{18}=\frac{8}{18}=\frac{2}{9}$.

δ. Η πιθανότητα του ζητούμενου ενδεχομένου είναι: $P[(A-B)\cup(B-A)]$ και επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $B-A$ είναι ασυμβίβαστα από τον απλό προσθετικό νόμο θα έχουμε :

$$P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{18}=\frac{7}{18}.$$

Άσκηση 7η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x-x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $K(e,f(e))$.

γ. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

δ. Για τα ενδεχόμενα Α και Β του δειγματικού χώρου Ω υποθέτουμε ότι $A\subseteq B$ και το Α δεν είναι το αδύνατο ενδεχόμενο.

Να αποδείξετε ότι: $P(A)\ln P(A)+P(B)\geq P(B)\ln P(B)+P(A)$.

Λύση

α. Είναι $A=(0,+\infty)$.

β. Έστω $y=\lambda x+\beta$ (1) η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης. Επειδή $\lambda=f'(e)$ πρέπει αρχικά να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης f. Έχουμε :

$f'(x)=(x\ln x)'-(x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'-1=1\cdot\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$ άρα
$\lambda=f'(e)=\ln e=1$ έτσι από την (1) έχουμε: $y=x+\beta$ (2). Είναι $f(e)=e\ln e-e=e\cdot 1-e=0$ όποτε $K(e,0)$ και καθώς το K είναι σημείο της εφαπτομένης ευθείας από την (2) έχουμε : $0=e+\beta\Leftrightarrow\beta=-e$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο $K(e,0)$ είναι $y=x-e$.

γ. Βρίσκουμε για ποια $x\in A$ η $f'(x)$ μηδενίζεται. $f'(x)=0\Leftrightarrow\ln x=0\Leftrightarrow x=e^0\Leftrightarrow x=1$.
Εξετάζουμε το πρόσημο της $f'(x)$. Έχουμε :
$f'(x)>0\Leftrightarrow\ln x>0\Leftrightarrow\ln x>\ln 1\Leftrightarrow x>1$ και $f'(x)<0\Leftrightarrow\ln x<0\Leftrightarrow\ln x<\ln 1\Leftrightarrow x<1$

Από τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και για $x=1$ παρουσιάζει ελάχιστο, το $f(1)=1\ln 1-1=0-1=-1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

δ. Επειδή το A δεν είναι το αδύνατο ενδεχόμενο είναι $0<P(A)$. Επίσης, επειδή $A\subseteq B$ είναι $P(A)\le P(B)$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι $0<P(A)\le P(B)\le 1$. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ έχουμε :
$P(A)\le P(B)\Leftrightarrow f(P(A))\ge f(P(B))\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(A)\ln P(A)-P(A)\ge P(B)\ln P(B)-P(B)\Leftrightarrow P(A)\ln P(A)+P(B)\ge P(B)\ln P(B)+P(A)$.

Άσκηση 8η
Δίνεται η συνάρτηση f ,δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύουν: $f'(1)=2$, $f''(1)=-1$ και $f(1)=3$. Δίνεται ακόμα η συνάρτηση $g(x)=xf(2x-3)+f(3-x)$, $x\in R$.
α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.
β. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g.
γ. Να δείξετε ότι $g(2)=9$ και $g'(2)=9$.
δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της g στο σημείο της $B(2,g(2))$.
ε. Να βρείτε τον αριθμό $\lambda\in R$ ώστε να ισχύει: $(\lambda+3)g''(2)+g'(2)=\lambda^2+4$.

Λύση
α. Έστω $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1,f(1))$ και επειδή από την υπόθεση $f(1)=3$ είναι $A(1,3)$. Έχουμε $\lambda=f'(1)=2$ οπότε $y=2x+\beta$ και καθώς το σημείο $A(1,3)$ είναι και σημείο της εφαπτομένης ευθείας για $x=1$ και $y=3$ έχουμε $3=2\cdot 1+\beta\Leftrightarrow\beta=1$. Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=2x+1$.
β. Επειδή $g(x)=xf(2x-3)+f(3-x)$ **(1)** για να βρούμε την παράγωγο της g εφαρμόζουμε κανόνα παραγώγισης σύνθεσης συναρτήσεων. Για $x\in R$ έχουμε
$g'(x)=(xf(2x-3))'+(f(3-x))'=(x)'f(2x-3)+x(f(2x-3))'+f'(3-x)(3-x)'=$
$1\cdot f(2x-3)+xf'(2x-3)(2x-3)'+f'(3-x)(-1)=f(2x-3)+2xf'(2x-3)-f'(3-x)$.
Άρα $g'(x)=f(2x-3)+2xf'(2x-3)-f'(3-x)$ **(2)**
γ. Για $x=2$ από την **(1)** προκύπτει:
$g(2)=2f(2\cdot 2-3)+f(3-2)=2f(1)+f(1)=3f(1)=3\cdot 3=9$.
Για $x=2$ από την **(2)** προκύπτει :
$g'(2)=f(2\cdot 2-3)+2\cdot 2f'(2\cdot 2-3)-f'(3-2)=f(1)+4f'(1)-f'(1)=f(1)+3f'(1)=3+3\cdot 2=9$.

δ. Έστω τώρα $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης g στο σημείο $B(2,g(2))$ δηλαδή στο $B(2,9)$ λόγω του ερωτήματος γ. Είναι $\lambda=g'(2)=9$ έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται $y=9x+\beta$ και καθώς το σημείο $B(2,9)$ είναι και σημείο της εφαπτομένης ευθείας για $x=2$ και $y=9$ έχουμε $9=9\cdot 2+\beta \Leftrightarrow \beta=-9$. Άρα $y=9x-9$ η η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας.

ε. Βρίσκουμε την $g''(x)$. Για $x\in R$ έχουμε :

$$g''(x)=(f(2x-3))'+2(xf'(2x-3))'-(f'(3-x))'=$$
$$f'(2x-3)(2x-3)'+2\left((x)'f'(2x-3)+x(f'(2x-3))'\right)-f''(3-x)(3-x)'=$$
$$2f'(2x-3)+2(f'(2x-3)+2xf''(2x-3))+f''(3-x).$$

Για $x=2$ $g''(2)=2f'(1)+2(f'(1)+4f''(1))+f''(1)=4f'(1)+9f''(1)=4\cdot 2+9(-1)=-1$.

Έτσι $(\lambda+3)g''(2)+g'(2)=\lambda^2+4 \Leftrightarrow (\lambda+3)(-1)+9=\lambda^2+4 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=1 \text{ ή}\\ \lambda=-2\end{cases}$

Άσκηση 9η

Μια αυτοκινητοβιομηχανία στον εξοπλισμό κάθε αυτοκινήτου της περιλαμβάνει προαιρετικά δερμάτινα καθίσματα και ράδιοσιντι. Στις παραγγελίες που έγιναν για το έτος 2004 το 40% των αυτοκινήτων που κατασκευάστηκαν είχαν δερμάτινα καθίσματα, 50% ράδιοσιντι ενώ ένα 15% είχαν ραδιοσιντι αλλά όχι δερμάτινα καθίσματα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α. Το αυτοκίνητο να μην έχει ράδιοσιντι.
β. Το αυτοκίνητο να μην έχει δερμάτινα καθίσματα.
γ. Το αυτοκίνητο να έχει δερμάτινα καθίσματα και ράδιοσιντι.
δ. Το αυτοκίνητο να έχει δερμάτινα καθίσματα ή ραδιοσιντι.
ε. Το αυτοκίνητο να μην έχει ούτε δερμάτινα καθίσματα ούτε ραδιοσιντί.

Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα :
Ρ: «το αυτοκίνητο έχει ράδιοσιντι» και Δ: «το αυτοκίνητο έχει δερμάτινα καθίσματα»
με $P(P)=\frac{50}{100}$ και $P(\Delta)=\frac{40}{100}$ αντίστοιχα Εργαζόμαστε με κανόνες λογισμού πιθανοτήτων.

α. $P(P')=1-P(P)=1-\frac{50}{100}=\frac{50}{100}$.

β. $P(\Delta')=1-P(\Delta)=1-\frac{40}{100}=\frac{60}{100}$.

γ.
$$P(P-\Delta)=\frac{15}{100}\Leftrightarrow P(P)-P(P\cap\Delta)=\frac{15}{100}\Leftrightarrow P(P\cap\Delta)=P(P)-\frac{15}{100}\Leftrightarrow$$
$$P(P\cap\Delta)=\frac{50}{100}-\frac{15}{100}\Leftrightarrow P(P\cap\Delta)=\frac{35}{100}.$$

δ. $P(P\cup\Delta)=P(P)+P(\Delta)-P(P\cap\Delta)\Leftrightarrow P(P\cup\Delta)=\frac{50}{100}+\frac{40}{100}-\frac{35}{100}\Leftrightarrow P(P\cup\Delta)=\frac{55}{100}$.

ε. $P\left[(P\cup\Delta)'\right]=1-P(P\cup\Delta)=1-\frac{45}{100}=55\%$

Άσκηση 10η

Το πλήθος σε δεκάδες χιλιάδες κομμάτια των πωλήσεων μιας εταιρίας που παράγει ηλεκτρονικούς υπολογιστές, δίνεται από την συνάρτηση $P(t)=\dfrac{400t}{t^2+25}$, $t\geq 0$, εκφράζει σε μήνες το χρόνο κυκλοφορίας του μοντέλου από την κυκλοφορία του στην αγορά.

α. Να βρείτε τις πωλήσεις του μοντέλου τον 10 μήνα κυκλοφορίας του στην αγορά.

β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής των πωλήσεων της εταιρείας μετά από ένα μήνα από την κυκλοφορία στην αγορά ενός νέου μοντέλου.

γ. Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία οι πωλήσεις παίρνουν τη μέγιστη τιμή.

δ. Να βρεθεί η μέγιστη ποσότητα σε δεκάδες χιλιάδες κομμάτια που πουλά η εταιρία το μήνα που βρέθηκε στο β ερώτημα.

Λύση

α. Για $t=10$ έχουμε $P(10)=\dfrac{400\cdot 10}{10^2+25}=\dfrac{4000}{125}=32$ δεκάδες χιλιάδες κομμάτια ή 320.000 κομμάτια.

β. Παραγωγίζουμε την συνάρτηση P. Έχουμε: $P'(t)=\dfrac{400(t)'\left(t^2+25\right)-400t\left(t^2+25\right)'}{\left(t^2+25\right)^2}=$

$=\dfrac{400t^2+10000-800t^2}{\left(t^2+25\right)^2}=\dfrac{10000-400t^2}{\left(t^2+25\right)^2}$. Ο ρυθμός μεταβολής των πωλήσεων τον 1^o μήνα κυκλοφορίας του μοντέλου είναι $P'(1)=\dfrac{10000-400\cdot 1^2}{\left(1^2+25\right)^2}=\dfrac{9600}{676}\cong 14{,}2$ δεκάδες χιλιάδες κομμάτια ή 142000 κομμάτια.

γ. Κάνουμε μελέτη μονοτονίας και ακροτάτων της συνάρτησης των πωλήσεων. Έχουμε :

$$P'(t)=0\Leftrightarrow \frac{10000-400t^2}{\left(t^2+25\right)^2}=0\Leftrightarrow 10000-400t^2=0\Leftrightarrow t^2=25\Leftrightarrow t=\begin{cases}-5 \text{ απορ. γιατί } t\geq 0\\ \text{ή}\\ 5\end{cases}$$

$$P'(t)>0\Leftrightarrow \frac{10000-400t^2}{\left(t^2+25\right)^2}>0\Leftrightarrow 10000-400t^2>0\Leftrightarrow t^2<25\overset{t\geq 0}{\Leftrightarrow} 0<t<5 \text{ και}$$

$$P'(t)<0\Leftrightarrow \frac{10000-400t^2}{\left(t^2+25\right)^2}<0\Leftrightarrow 10000-400t^2<0\Leftrightarrow t^2>25\overset{t\geq 0}{\Leftrightarrow} t>5$$. Ο πίνακας μεταβολών της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η συνάρτηση των πωλήσεων παίρνει την μέγιστη τιμή για t=5.

t	0	5	$+\infty$
$P'(t)$	+ ↗		-
$P(t)$		0	↘

max

δ. Για t=5 έχουμε: $P(5)=\dfrac{400\cdot 5}{5^2+25}=\dfrac{2000}{50}=40$ δεκάδες χιλιάδες κομμάτια.

Άσκηση 11η
Οι 70 δημόσιοι υπάλληλοι δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μιας νομαρχίας έχουν μέσο μηνιαίο μισθό 800 Ευρώ, ενώ οι υπάλληλοι πανεπιστημιακής εκπαίδευσης έχουν μέσο μισθό 1.100 Ευρώ. Ο μέσος μισθός όλων των υπαλλήλων στη νομαρχία είναι 890 ευρω.
Α. α. Να βρείτε πόσοι είναι οι υπάλληλοι πανεπιστημιακής εκπαίδευσης.
β. Ποιο είναι το μηνιαίο οικονομικό κονδύλι που απαιτείται για την αποπληρωμή όλων των εργαζομένων στην νομαρχία;
Β. Την 1η Ιανουαρίου του έτους 2005 δόθηκε αύξηση 30 Ευρώ μηνιαία σε κάθε υπάλληλο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και 4% σε κάθε υπάλληλοι πανεπιστημιακής εκπαίδευσης. Να υπολογίσετε:
α. Το μέσο μισθό των υπαλλήλων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και το μέσο μισθό των υπάλληλοι πανεπιστημιακής εκπαίδευσης όπως θα διαμορφωθεί μετά την αύξηση.
β. Το νέο μισθό των εργαζομένων στην νομαρχία.

Λύση
Θεωρούμε ν_Δ και ν_Π τον αριθμό των υπαλλήλων της δευτεροβάθμιας και πανεπιστημιακής εκπαίδευσης αντίστοιχα που εργάζονται στην νομαρχία. Επίσης θεωρούμε $\bar{x}_\Delta$ και $\bar{x}_\Pi$ τους μέσους μηνιαίους μισθούς των υπαλλήλων της δευτεροβάθμιας και πανεπιστημιακής εκπαίδευσης αντίστοιχα και $\bar{x}$ ο μέσος μηνιαίος μισθός όλων των υπαλλήλων.

Α. α. Θα έχουμε:

$$\bar{x} = 890 \Leftrightarrow \frac{\nu_\Delta \cdot \bar{x}_\Delta + \nu_\Pi \cdot \bar{x}_\Pi}{\nu_\Delta + \nu_\Pi} = 890 \Leftrightarrow \frac{70 \cdot 800 + \nu_\Pi \cdot 1.100}{70 + \nu_\Pi} = 890$$

$$\Leftrightarrow 56.000 + 1.100\nu_\Pi = 62.300 + 890\nu_\Pi \Leftrightarrow 1.100\nu_\Pi - 890\nu_\Pi = 62.300 - 56.000$$

$$\Leftrightarrow 210\nu_\Pi = 6.300 \Leftrightarrow \nu_\Pi = 30.$$

Άρα έχουμε 30 υπαλλήλους πανεπιστημιακής εκπαίδευσης.
β. Αφού οι υπάλληλοι είναι συνολικά $70 + 30 = 100$ και ο μέσος μηνιαίος μισθός 890Ε το συνολικό ποσό που απαιτείται για την αποπληρωμή τους είναι 89000Ε κάθε μήνα.

Β. α. Μετά την 1η Ιανουαρίου οι νέοι μέσοι μηνιαίοι μισθοί διαμορφώνονται ως εξής : για τους υπαλλήλους της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης $\bar{x}'_\Delta = \bar{x}_\Delta + 30 = 800 + 30 = 830$ Ε ενώ για τους υπαλλήλους της πανεπιστημιακής εκπαίδευσης

$$\bar{x}'_\Pi = \bar{x}_\Pi + \frac{4}{100}\bar{x}_\Pi = 1{,}04\bar{x}_\Pi = 1{,}04 \cdot 1100 = 1144 \text{ Ε}.$$

β. Ο νέος μέσος μηνιαίος μισθός όλων των υπαλλήλων μετά την 1η Ιανουαρίου είναι

$$\bar{x}' = \frac{\nu_\Delta \cdot \bar{x}'_\Delta + \nu_\Pi \cdot \bar{x}'_\Pi}{\nu_\Delta + \nu_\Pi} = \frac{70 \cdot 830 + 30 \cdot 1144}{70 + 30} = \frac{92420}{100} 924{,}20 \text{ Ε}.$$

Άσκηση $12^η$

Το μέσο ύψος 70.000 μαθητών της Γ' λυκείου είναι $\overline{x}=172cm$ και η τυπική απόκλιση είναι $s=7cm$. Η κατανομή των μαθητών ως προς το ύψος είναι περίπου κανονική.

α. Να αποδείξετε ότι το δείγμα των μαθητών της Γ' λυκείου έχει ομοιογένεια ως προς το ύψος.

β. Να εκτιμήσετε πόσοι μαθητές της Γ' λυκείου έχουν ύψος μεταξύ $165cm$ και $179cm$.

γ. Επιλέγοντας τυχαία ένα μαθητή της Γ' λυκείου να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α={ το ύψος του μαθητή είναι μεταξύ $165cm$ και $193cm$ }.

δ. Αν κατά την μέτρηση του ύψους όλων των μαθητών είχε από λάθος μετρηθεί $2cm$ περισσότερο από το πραγματικό να βρείτε πόσο είναι το «πραγματικό» μέσο ύψος.

ε. Λαμβάνοντας υπόψη τα «πραγματικά» στοιχεία του ύψους των μαθητών, το δείγμα σε αυτήν την περίπτωση είναι περισσότερο ή λιγότερο ομοιογενές από το δείγμα για το οποίο είχαμε λάβει υπόψη τα «πλασματικά» στοιχεία του ύψους;

Λύση

α. Υπολογίζουμε τον συντελεστή μεταβολής για το δείγμα. Είναι $CV=\frac{S}{\overline{x}}\cdot 100=\frac{7}{172}\cdot 100=4{,}06\%<10\%$ άρα πράγματι έχει ομοιογένεια ως προς το ύψος το δείγμα των μαθητών.

β. Επειδή η κατανομή του ύψους είναι κανονική στο διάστημα $\left(\overline{x}-S,\overline{x}+S\right)$ δηλαδή από 165 cm ως 179 cm βρίσκουμε το 68% του δείγματος δηλαδή $\frac{68}{100}\cdot 70.000=47.600$ μαθητές.

γ. Επειδή η κατανομή είναι κανονική τα ύψη από 165 cm ως 193 cm αντιστοιχούν στο διάστημα $\left(\overline{x}-S,\overline{x}+3S\right)$ στο οποίο βρίσκουμε το $68+\frac{99{,}7-68}{2}=68+15{,}85=83{,}85\%$ των παρατηρήσεων του δείγματος. Έτσι η πιθανότητα επιλέγοντας τυχαία έναν μαθητή η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι $P(A)=0{,}8385$.

δ. Το «πραγματικό» μέσο ύψος θα είναι $\overline{y}=\overline{x}-2=172-2=170cm$.

ε. Η τυπική απόκλιση λαμβάνοντας υπόψη τα «πραγματικά στοιχεία» του ύψους των μαθητών δεν μεταβάλλεται έτσι $S_y=S=7cm.$ Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος έχοντας την «πραγματική» μέση τιμή του ύψους είναι $CV_y=\frac{S_y}{\overline{y}}\cdot 100=\frac{7}{170}\cdot 100=4{,}11\%>CV$.

Παρατηρούμε ότι λαμβάνοντας τα πραγματικά στοιχεία του ύψους των μαθητών ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος αυξάνει σε σχέση με το συντελεστή μεταβολής του δείγματος που υπολογίσαμε λαμβάνοντας τα «πλασματικά» στοιχεία του ύψους, δηλαδή το δείγμα με τα «πραγματικά» στοιχεία του ύψους είναι λιγότερο ομοιογενές συγκριτικά με αυτό που είχαμε αρχικά.

Άσκηση 13η

Δίνονται τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία ισχύουν:

$$P(A') = 1 - x,\ P(B') = \frac{x}{x+1},\ \text{και } P(A \cap B) = \frac{x}{x+1} \text{ με } x \in (0,1).$$

α. Για $x = \frac{1}{2}$ να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A \cup B)$.

γ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της $P(A \cup B)$.

δ. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A - B$, $B - A$.

ε. να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της $P[(A-B) \cup (B-A)]$, όταν $x = \frac{1}{2}$.

Λύση

Έχουμε:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - (1-x) = x \text{ και } P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-x}{x+1} = \frac{1}{x+1} \quad x \in (0,1).$$

α. Για $x = \frac{1}{2}$ έχουμε $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > 1$ **αδύνατο** γιατί $0 \le P(A \cup B) \le 1$ άρα τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

β.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = x + \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{x(x+1)+1-x}{x+1} = \frac{x^2+x+1-x}{x+1} = \frac{x^2+1}{x+1}$$

δηλαδή $P(A \cup B) = \frac{x^2+1}{x+1}$ με $x \in (0,1)$.

γ. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = P(A \cup B) = \frac{x^2+1}{x+1}$ με $x \in (0,1)$.

Έχουμε $$f'(x) = \frac{(x^2+1)'(x+1) - (x^2+1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - (x^2+1)1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} \quad x \in (0,1).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -1-\sqrt{2} \\ ή \\ -1+\sqrt{2} \end{cases}$$

Επειδή $(x+1)^2 > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ το πρόσημο της $f'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου x^2+2x-1 στο διάστημα $(0,1)$. Συμπληρώνουμε τον πίνακα μεταβολών της f.

x	0	$-1+\sqrt{2}$	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

Για $x=-1+\sqrt{2}$ η f παρουσιάζει ελάχιστο η τιμή του οποίου είναι $f\left(-1+\sqrt{2}\right)=\frac{\left(-1+\sqrt{2}\right)^2+1}{-1+\sqrt{2}+1}=\frac{1-2\sqrt{2}+2+1}{\sqrt{2}}=\frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}-2=2\sqrt{2}-2$.

Έτσι η ελάχιστη τιμή της $P(A\cup B)$ είναι $2\sqrt{2}-2$.

δ. $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=x-\frac{x}{x+1}=\frac{x^2+x-x}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}\quad x\in(0,1)$.

$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{x+1}-\frac{x}{x+1}=\frac{1-x}{x+1}\quad x\in(0,1)$.

ε. $P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A-B)+P(B-A)=\frac{x^2}{x+1}-\frac{1-x}{x+1}=\frac{x^2+x-1}{x+1}\quad x\in(0,1)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=P[(A-B)\cup(B-A)]=\frac{x^2+x-1}{x+1}\quad x\in(0,1)$.

$$g'(x)=\frac{\left(x^2+x-1\right)'(x+1)-\left(x^2+x-1\right)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{(2x+1)(x+1)-\left(x^2+x-1\right)\cdot 1}{(x+1)^2}=$$

$=\frac{2x^2+2x+x+1-x^2-x+1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$ και για $x=\frac{1}{2}$ έχουμε

$$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\frac{1}{2}+2}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}=\frac{\frac{1}{4}+3}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\frac{13}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{13}{9}.$$

Άσκηση 14η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
β. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f.
γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.
δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f που είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$.

Λύση

α. Πρέπει $x^2+1\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq -1$ που ισχύει για κάθε πραγματικό x. Άρα πεδίο ορισμού είναι
το $A=R$.

β. $f'(x)=\frac{(2x)'\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\left(x^2+1\right)-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

γ. Βρίσκουμε που μηδενίζεται η $f'(x)$. Έχουμε:

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow -2x^2+2=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$, θέσεις πιθανών ακροτάτων.

Κάνουμε μελέτη του προσήμου της f.

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}>0\overset{\left(x^2+1\right)^2>0}{\Longleftrightarrow}-2x^2+2>0\Leftrightarrow -1<x<1$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}<0\overset{\left(x^2+1\right)^2>0}{\Longleftrightarrow}-2x^2+2<0\Leftrightarrow x<-1 \text{ ή } x>1.$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f.

f	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$\searrow$	Τ.Ε	$\nearrow$	Τ.Μ	$\searrow$	

Η συνάρτηση f παρουσιάζει για $x=-1$ τοπικό ελάχιστο ενώ για $x=1$ τοπικό μέγιστο.

δ. Αφού η εφαπτομένη ευθεία είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=2x-1$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=2$. Είναι όμως:

$$\lambda=f'(x_0)\Leftrightarrow\frac{2\left(-x_0^2+1\right)}{\left(1+x_0^2\right)^2}=2\Leftrightarrow -x_0^2+1=\left(1+x_0^2\right)^2\Leftrightarrow -x_0^2+1=1+2x_0^2+x_0^4\Leftrightarrow x_0^4+3x_0^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0^2\left(x_0^2+3\right)=0\overset{x_0^2+3\neq 0}{\Leftrightarrow}x_0^2=0\Leftrightarrow x_0=0.$$

Για $x=0$ είναι $f(0)=\dfrac{2\cdot 0}{0^2+1}=0.$ Επομένως η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $(0,0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=2$, άρα έχει εξίσωση $y=2x$.

Άσκηση 15η

Δίνεται μια κατανομή με τα δεδομένα της ομαδοποιημένα σε τέσσερις κλάσεις.

Α. Να βρεθούν οι συχνότητες v_1, v_2, v_3, v_4 των κλάσεων όταν:

ι) το $v_1=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

ιι) το v_2 ισούται με την κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=2x^2-20\sqrt{x}-16\ln x+1$ στο σημείο $A(4,f(4))$.

ιιι) το v_3 είναι η τιμή για την οποία συνάρτηση g με $g(x)=\begin{cases}x^2+5 & \text{αν } x\neq 3\\ v_3+3 & \text{αν } x=3\end{cases}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0=3$.

ιv) το $v_4=\dfrac{v_1+3v_2+v_3}{2}$.

Β.α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα της κατανομής που ακολουθεί λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα του ερωτήματος Α:

Κλάσεις[-)	Συχνότητα v_i	Κέντρο x_i	Σχετική Συχνότητα f_i%	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Συχνότητα F_i%	Γινόμενα $x_i v_i$
4-10						
10-16						
16-22						
22-28						
Άθροισμα						

β. Να βρεθεί η μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων.

γ. Αν οι παραπάνω κλάσεις αναφέρονται στις απουσίες 40 μαθητών της γ τάξης ενός λυκείου για το μήνα Μάιο και οι κλάσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες να βρεθεί ο αριθμός των μαθητών που έχουν απουσίες από 16 ως 25 και το ποσοστό των μαθητών που έχουν τουλάχιστον 10 απουσίες για τον μήνα αυτόν.

Λύση

Α.

i)

$$v_1=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}\left(=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x+1-4}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x+1}+2\right)=\sqrt{3+1}+2=2+2=4.$$

Άρα $v_1=4$.

ii)

Είναι $f'(x)=4x-20\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-16\cdot\frac{1}{x}=4x-\frac{10}{\sqrt{x}}-\frac{16}{x}$ και επειδή η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης, δηλαδή ο συντελεστής διεύθυνσης, στο $A(4,f(4))$ είναι ίση με $f'(4)$ θα έχουμε $v_2=f'(4)=4\cdot 4-\frac{10}{\sqrt{4}}-\frac{16}{4}=16-\frac{10}{2}-4=16-5-4=7$. Άρα $v_2=7$.

iii) Για να είναι η συνάρτηση g συνεχής στο σημείο $x_0=3$ πρέπει $\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 3}\left(x^2+5\right)=v_3+3\Leftrightarrow 3^2+5=v_3+3\Leftrightarrow v_3=9+5-3\Leftrightarrow v_3=11.$

iv) $v_4=\frac{v_1+3v_2+v_3}{2}\Leftrightarrow v_4=\frac{4+3\cdot 7+11}{2}\Leftrightarrow v_4=\frac{36}{2}\Leftrightarrow v_4=18.$

Β.α. Από τον ορισμό της σχετικής συχνότητας δηλαδή από την ισότητα $f_i\%=\frac{v_i}{v}\cdot 100$ για $i=1,2,3,4$ έχουμε διαδοχικά $f_1\%=10$, $f_2\%=17{,}5$, $f_3\%=27{,}5\%$, $f_4\%=45$. Με την χρήση του ορισμού των αθροιστικών συχνοτήτων, απόλυτων και σχετικών, όπως και του κέντρου κλάσης συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις[-)	Συχνότητα v_i	Κέντρο x_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Συχνότητα $F_i\%$	Γινόμενα x_iv_i
4-10	4	7	10	4	10	28
10-16	7	13	17,5	11	27,5	91
16-22	11	19	27,5	22	55	209
22-28	18	25	45	40	100	450
Άθροισμα	40		100			778

β. Από τον παραπάνω πίνακα βρίσκουμε $\sum x_iv_i=778$.Έτσι $\bar{x}=\frac{1}{40}\cdot 778=19{,}45$**.**

γ. Επειδή οι κλάσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες το σύνολο των μαθητών που έχουν από 16 ως 25 απουσίες για τον μήνα Μάιο είναι το άθροισμα $v_3+\frac{v_4}{2}$ δηλαδή όλοι οι μαθητές της 3ης κλάσης και οι μισοί της 4ης κλάσης. Είναι $v_3+\frac{v_4}{2}=11+9=20$ μαθητές. Το ποσοστό των μαθητών που έχουν τουλάχιστον 10 απουσίες τον Μάιο είναι $100-F_1=100-10=90\%$.

Άσκηση 16^η

Η βαθμολογία των γραπτών 50 μαθητών κυμάνθηκε από 10 έως 20. Οι 50 βαθμοί χωρίστηκαν σε κλάσεις ίσους πλάτους για τις οποίες κατασκευάζοντας τα ιστογράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων καθώς και το κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων παρατηρήθηκε ότι:

ι) Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων το εμβαδόν του ορθογωνίου της κλάσης 10-12 ισούται με 5

ιι) Στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, το ύψος του ορθογωνίου της κλάσης 16-18 είναι 20%

ιιι) Στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, το τόξο που αντιστοιχεί στην κλάση 14-16 είναι 144°.

Είναι επίσης γνωστό ότι οι μαθητές που το γραπτό τους βαθμολογήθηκε από 12 έως 14 είναι τετραπλάσιοι από τους μαθητές που το γραπτό τους βαθμολογήθηκε από 18 έως 20, να δείξετε ότι:

α. Το πλάτος της κάθε κλάσης είναι 2.

β. Οι μαθητές με βαθμό από 18 έως 20 είναι 3.

γ. Να γίνει πίνακας κατανομής συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και να βρεθεί η μέση τιμή και η διάμεσος.

δ. Να υπολογιστεί, επιλέγοντας τυχαία έναν από τους παραπάνω μαθητές, η πιθανότητα το γραπτό του να έχει βαθμολογηθεί με βαθμό μεγαλύτερο από 15.

Λύση

α. Το εύρος είναι $R = 20 - 10 = 10$ και επειδή οι 5 κλάσεις είναι ισοπλατείς το πλάτος c είναι $c = \frac{R}{\kappa} = \frac{10}{5} = 2$.

β. Για την κλάση $[10,12)$ είναι $E_1 = 5 \Leftrightarrow \nu_1 = 5$ γιατί στο ιστόγραμμα συχνοτήτων το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου είναι ίσο με την συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης. Για την κλάση $[16,18)$ είναι $f_4\% = 20 \Leftrightarrow \frac{\nu_4}{\nu} \cdot 100 = 20 \Leftrightarrow \frac{\nu_4}{50} = 0{,}2 \Leftrightarrow \nu_4 = 10$.

Για την κλάση $[14,16)$ είναι $\alpha_3 = 144^\circ \Leftrightarrow \frac{\nu_3}{50} \cdot 360^\circ = 144^\circ \Leftrightarrow \nu_3 = \frac{144^\circ \cdot 50}{360^\circ} \Leftrightarrow \nu_3 = 20$.

Αν ν_5 η συχνότητα της κλάσης $[18,20)$ και ν_2 η συχνότητα της κλάσης $[12,14)$ τότε $\nu_2 = 4\nu_5$ αφού οι μαθητές που το γραπτό τους βαθμολογήθηκε από 12 έως 14 είναι τετραπλάσιοι από τους μαθητές που το γραπτό τους βαθμολογήθηκε από 18 έως 20.

Επειδή $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = 50 \overset{\nu_2 = 4\nu_5}{\Leftrightarrow} 5 + 4\nu_5 + 20 + 10 + \nu_5 = 50 \Leftrightarrow 5\nu_5 = 15 \Leftrightarrow \nu_5 = 3$ και άρα $\nu_2 = 4 \cdot 3 = 12$.

γ. Κατασκευάζουμε τον πίνακα συχνοτήτων.

Κλάσεις	x_i	ν_i	$x_i\nu_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
$[10,12)$	11	5	55	10	10
$[12,14)$	13	12	156	24	34
$[14,16)$	15	20	300	40	74
$[16,18)$	17	10	170	20	94
$[18,20)$	19	3	57	6	100
Άθροισμα		50	738	100	

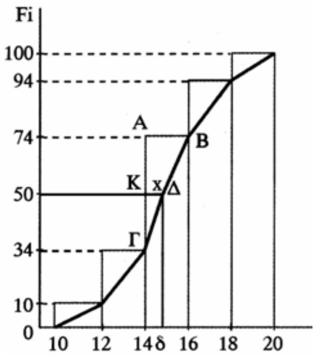
Είναι $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 100$ οπότε διαδοχικά για i=1,2,3,4 βρίσκουμε:

$f_1\%=10$, $f_2\%=24$, $f_3\%=40$

$f_4\%=20$, $f_5\%=6$

Είναι $\sum x_i\nu_i = 738$ άρα $\bar{x} = \frac{1}{50} \cdot 738 = 14{,}76$.

Για να βρούμε τη διάμεσο κατασκευάζουμε το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.



Από τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΔΓ έχουμε:

$$\frac{K\Delta}{K\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{x}{50-34} = \frac{2}{74-34} \Leftrightarrow \frac{x}{16} = \frac{2}{40} \Leftrightarrow x = 0{,}8$$

Άρα $\delta = 14 + 0{,}8 = 14{,}8$

δ. Οι μαθητές με βαθμό μεγαλύτερο του 15 είναι $3 + 10 + \frac{20}{2} = 3 + 10 + 10 = 23$ έτσι η πιθανότητα να επιλέξουμε μαθητή με βαθμό μεγαλύτερο του 15 είναι $\frac{23}{50}$.

Άσκηση 17η

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων :

Κλάσεις	**Κέντρα xi**	**Συχνότητα νi**	**fi**	**Ni**	**Fi**
[153-159)	156	20			
[159-165)					0.35
[165-171)					0.51
[171-177)		12			
[177-183)			0.09		
[183-189)			0.1		0.82
[189-195)	192			100	
Σύνολο					

α. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα
β. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο συχνοτητων και Αθροιστικών συχνοτητων
γ. Να βρείτε την μέση τιμή και τη διάμεσο

Λύση

α. Το κέντρο x_i κάθε κλάσης ισούται με το ημιάθροισμα των άκρων της κλάσης. Έχουμε:

$x_2 = \frac{159+165}{2} = 162$, $x_3 = \frac{165+171}{2} = 168$, $x_4 = \frac{171+177}{2} = 174$, $x_5 = \frac{177+183}{2} = 180$

$x_6 = \frac{183+189}{2} = 186$

1η γραμμή του πίνακα:

Είναι $N_1 = \nu_1 = 20$. Επίσης $N_7 = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_7 = 100$, άρα $\nu = 100$

$f_1 = \frac{\nu_{1i}}{\nu} = \frac{20}{100} = 0{,}2$ και $F_1 = f_1 = 0{,}2$

2η γραμμή:

$f_2 = F_2 - f_1 = 0{,}35 - 0{,}2 = 0{,}15$. Επίσης $\nu_2 = f_2 \cdot \nu = 15$ και $N_2 = \nu_1 + \nu_2 = 35$

3η γραμμή:

Είναι $f_3 = F_3 - F_2 = 0{,}51 - 0{,}35 = 0{,}16$ και $\nu_3 = f_3 \cdot \nu = 16$.Επίσης $N_3 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 51$

4η γραμμή:

$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{12}{100} = 0{,}12$ και $F_4=F_3+f_4=0{,}63$. Επίσης $N_4=v_1+v_2+v_3+v_4=63$

5η γραμμή:

$f_5 = \frac{v_5}{v} \Leftrightarrow v_5 = f_5 \cdot v = 9$ και $F_5=F_4+f_5=0{,}63+0{,}09=0{,}72$.

Επίσης $N_5=N_4+v_5=63+9=72$

6η γραμμή:

$v_6 = f_6 \cdot v = 10$ και $N_6=N_5+v_6=82$

7η γραμμή:

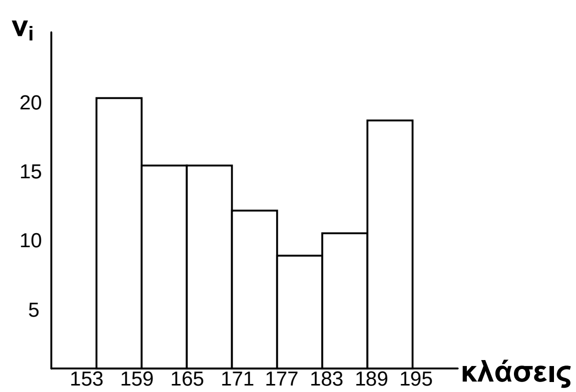
Είναι $N_7-N_6 = v_7$ άρα $v_7=100-82=18$ και $f_7 = \frac{v_7}{v} = \frac{18}{100} = 0{,}18$.

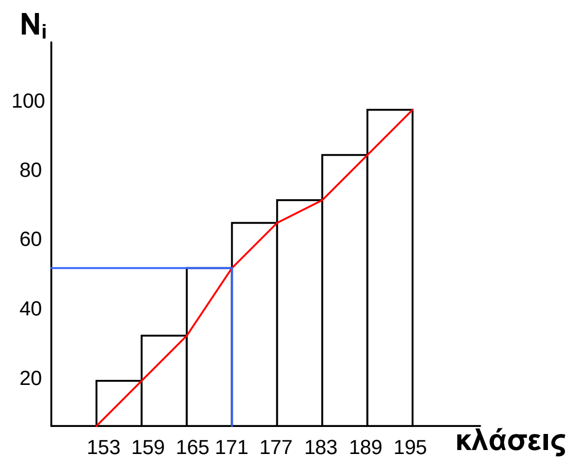
Επίσης $F_7=F_6+f_7=0{,}82+0{,}18=1$.

Οπότε ο πίνακας συμπληρωμένος έχει την παρακάτω μορφή :

Κλάσεις	Κέντρα xi	Συχνότητα vi	fi	Ni	Fi
[153-159)	156	20	0,2	20	0,2
[159-165)	162	15	0,15	35	0,35
[165-171)	168	16	0,16	51	0,51
[171-177)	174	12	0,12	63	0,63
[177-183)	180	9	0,09	72	0,72
[183-189)	186	10	0,1	82	0,82
[189-195)	192	18	0,18	100	1
Σύνολο	-	100	1	-	-

β.





γ. Είναι $\bar{x} = \dfrac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_7 v_7}{v} = \dfrac{17262}{100} = 172{,}62$

Από το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων βρίσκουμε την διάμεσο $\delta \approx 171$

Άσκηση 18η

Το μέσο βάρος 4 ατόμων σε έναν ανελκυστήρα είναι 72 κιλά. Σε κάποιον όροφο μπαίνει ένας επιπλέον που ζυγίζει 98 κιλά.

α. Πόσο είναι το νέο μέσο βάρος όλων μαζί ;

β. Αν ο ανελκυστήρας μπορεί να αντέξει μέσο βάρος 80 κιλά και το πολύ 6 άτομα, μέχρι πόσα κιλά πρέπει να ζυγίζει ο έκτος επιβάτης ;

Λύση

α. Αν x_1, x_2, x_3, x_4 τα βάρη των τεσσάρων ατόμων, έχουμε $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \bar{x} \cdot 4 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 72 \cdot 4 = 288$

συμβολίζουμε x_5 το βάρος του επιπλέον ατόμου που μπαίνει στον ανελκυστήρα, άρα x_5=98. Το νέο μέσο βάρος όλων μαζί θα είναι

$\bar{x}' = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \dfrac{288 + 98}{5} = \dfrac{386}{5} = 77{,}2$ κιλά

β. Αν x_6 το βάρος του έκτου επιβάτη, και $\bar{x}''$ το μέσο βάρος όλων μαζί, θα πρέπει

$\bar{x}'' \leq 80 \Leftrightarrow \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} \leq 80 \Leftrightarrow \dfrac{386 + x_6}{6} \leq 80 \Leftrightarrow 386 + x_6 \leq 480 \Leftrightarrow x_6 \leq 94$

άρα ο έκτος επιβάτης μπορεί να ζυγίζει μέχρι 94 κιλά.

Άσκηση 19η

Σε μια κανονική κατανομή, το 49,85% των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα (10,16). Να εξετασθεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Λύση

Στην κανονική κατανομή γνωρίζουμε πως στο διάστημα $\left(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S\right)$ βρίσκεται το 95% των τιμών της μεταβλητής. Άρα το $49{,}85 = \dfrac{99{,}7}{2}$ θα βρίσκεται στο διάστημα $\left(\bar{x} - 3S, \bar{x}\right)$ ή στο $\left(\bar{x}, \bar{x} + 3S\right)$. Οπότε $\left(\bar{x} - 3S, \bar{x}\right)$=$\left(10{,}16\right)$ (1) ή $\left(\bar{x}, \bar{x} + 3S\right)$=$\left(10{,}16\right)$ (2).

Από την (1) έχουμε $\bar{x} = 16$ και S=2, άρα $CV = \dfrac{S}{\bar{x}} = \dfrac{2}{16} = 0{,}125 = 12{,}5\% > 10\%$, άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

Από την (2) έχουμε $\bar{x} = 10$ και S=2, άρα $CV = \dfrac{S}{\bar{x}} = \dfrac{2}{10} = 0{,}2 = 20\% > 10\%$, άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

Άσκηση 20η

Πέντε διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί έχουν μέση τιμή 8. Να υπολογιστεί ο συντελεστής μεταβολής.

Λύση

Θέτουμε x, x+1, x+2, x+3, x+4 τους ζητούμενους διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς.

Αφού έχουν μέση τιμή 8, έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)}{5} \Leftrightarrow 8 = \frac{5x+10}{5} \Leftrightarrow 5x+10=40 \Leftrightarrow 5x=30 \Leftrightarrow x=6$$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί θα είναι οι 6,7,8,9,10

Άσκηση 21η

Εξετάσαμε ένα δείγμα μαθητών μιας τάξης ως προς το βάρος τους και διαπιστώθηκε ότι κυμαίνεται από 45 εως 75 κιλά, ενώ η κατανομή των βαρών είναι κανονική.
α. Να βρεθεί η μέση τιμή και το εύρος.
β. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
γ. Αν το άθροισμα των βαρών είναι 1800 κιλά, να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος.
δ. Τι ποσοστό των μαθητών έχει βάρος το οποίο κυμαίνεται μεταξύ 50 και 60 κιλών;

Λύση

α. Εφόσον η κατανομή των βαρών των μαθητών είναι κανονική, έχουμε $\left(\bar{x}-3S, \bar{x}+3S\right) = (45{,}75)$ άρα $\bar{x}-3S=45$ (1) και $\bar{x}+3S=75$ (2).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε $2\bar{x}=120 \Leftrightarrow \bar{x}=60$ κιλά.

Αντικαθιστώντας στην σχέση (1) ή (2) την μέση τιμή που βρήκαμε, έχουμε $\bar{x}-3S=45 \Leftrightarrow -3S=45-60 \Leftrightarrow S=5$ κιλά

Το εύρος R στην κανονική κατανομή ισούται $R \approx 6S$ άρα $R \approx 6 \cdot 5 = 30$ κιλά.

β. Είναι $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{5}{60} = 0{,}083 = 8{,}3\%$ <10% άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ. Έχουμε $\Sigma x_i = 1800$, οπότε $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{\nu} \Leftrightarrow 60 = \frac{1800}{\nu} \Leftrightarrow \nu = 30$ μαθητές

δ. Το ποσοστό των μαθητών των οποίων το βάρος βρίσκεται μεταξύ $\left(\bar{x}-2S, \bar{x}+2S\right) = (50{,}70)$ είναι 95%, άρα στο διάστημα $\left(\bar{x}-2S, \bar{x}\right) = (50{,}60)$ θα βρίσκεται το 47,5% των μαθητών.

Άσκηση 22η

Δίνεται συνάρτηση f με $f'(x)=(x-3)(x^2-9x+20)$, $x \in R$.
Α. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f.
Β. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_6$ οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, με $x_\kappa = 2\kappa$, όπου κ=1,2,3,4,5,6 και αντίστοιχες συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_6$ με $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3$ και $\nu_4 = 2\nu_1$, $\nu_5 = \nu_3 + \nu_1$, $\nu_6 = \nu_2 + \nu_5$ όπου ν_1, ν_2, ν_3 οι τετμημένες των σημείων στα οποία η f παρουσιάζει ακρότατα :
α. Να βρεθεί η μέση τιμή
β. Να βρεθεί η διάμεσος

Λύση

Α. Για κάθε $x \in R$ έχουμε: $f'(x) = (x-3)(x-4)(x-5)$

x	$-\infty$		3		4		5		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	0	+	
f		↘		↗		↘		↗	
			ΤΕ		**ΤΜ**		**ΤΕ**		

Η f παρουσιάζει:

- τοπικό ελάχιστο στο 3
- τοπικό μέγιστο στο 4
- τοπικό ελάχιστο στο 5

Β. Οι τιμές της μεταβλητής θα είναι: $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=6$, $x_4=8$, $x_5=10$, $x_6=12$.
α. Αφού $v_1<v_2<v_3$, θα είναι $v_1=3$, $v_2=4$, $v_3=5$. Επίσης $v_4=2v_1=6$, $v_5=v_3+v_1=8$ και $v_6=v_2+v_5=12$.
Το μέγεθος του δείγματος θα είναι: $v= v_1+v_2+...+v_6=38$

Άρα η μέση τιμή θα είναι $\bar{x}=\frac{\Sigma x_i v_i}{v}=\frac{6+16+30+48+80+144}{38}=8{,}52$

β. Το μέγεθος του δείγματος είναι v=38 άρτιος, οπότε τοποθετώντας τις τιμές σε αύξουσα σειρά, η διάμεσος θα ισούται με το ημιάθροισμα της 19ης και 20ης τιμής, άρα $\delta=\frac{10+10}{2}=10$

Άσκηση 23η
Έστω Χ μια ποσοτική μεταβλητή ως προς την οποία εξετάσαμε ένα δείγμα μεγέθους ν και $x_1,x_2,\ldots,x_v$ οι παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}>0$ και τυπική απόκλιση S. Θεωρούμε και την συνάρτηση $f(x)=3x^3-(\bar{x})^2x+10S$. Αν η f(x) παρουσιάζει για x=1, ελάχιστο ίσο με f(1)= -1, τότε:
α. Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση
β. Να μελετηθεί το παραπάνω δείγμα ως προς την ομοιογένεια.
γ. Αν θεωρήσουμε ότι η κατανομή των παρατηρήσεων είναι κανονική, αν επιλέξουμε τυχαία μια τιμή, τι ποσοστό των τιμών είναι μεταξύ 2,5 και 3,5;

Λύση
α. Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1 ακρότατο (ελάχιστο) πρέπει f'(1)=0
Έχουμε $f'(x)=9x^2-\bar{x}^2$. Αφού $f'(1)=0 \Leftrightarrow 9-\bar{x}^2=0 \Leftrightarrow \bar{x}=3$ ($\bar{x}>0$)
Άρα η συνάρτηση f γίνεται: $f(x)= 3x^3-9x+10S$. Αφού δίνεται ότι f(1)= -1 έχουμε
$3-9+10S=-1 \Leftrightarrow S=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

β. Είναι $CV=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{6}=0{,}16=16\%>10\%$ άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές
γ. Αφού η κατανομή των παρατηρήσεων είναι κανονική, το ποσοστό των τιμών που βρίσκονται στο διάστημα $\left(\bar{x}-S,\bar{x}+S\right)=\left(2.5,3.5\right)$ θα είναι 68%.

Άσκηση 24η
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-2x^2+12x+(-\mu^2-\mu+44)$ Να βρεθεί το μ>0 εάν γνωρίζουμε ότι η μέγιστη τιμή της f είναι το 50.

Λύση
Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=-4x+12=-4(x-3)$
Είναι: f'(x)>0 για x<3 και f'(x)<0 για x>3
Άρα στο 3, η f παρουσιάζει μέγιστο.
Είναι $f(3)=50 \Leftrightarrow -18+36+(-\mu^2-\mu+44)=50 \Leftrightarrow -\mu^2-\mu+12=0 \Leftrightarrow$ μ=3
(αφού μ>0)

Άσκηση 25η

Έστω Α, Β ενδεχόμενα του ιδίου δειγματικού χώρου Ω με P(A) < P(B) και η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x-4$ με $x\in\Re$.

Αν P(A), P(B) είναι οι τιμές των τοπικών ακρότατων της f να βρείτε τα P(A), P(B) και να εξετάσετε αν τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=x^2-5x+6 \Leftrightarrow f'(x)=(x-2)(x-3)$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
f'(x)	+	-	+	
f	↗	↘	↗	

Στο 2 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, ίσο με f(2)=$\frac{2}{3}$

Στο 3 η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, ίσο με f(3)=$\frac{1}{2}$

Αφού P(A)<P(B), έχουμε P(A)= $\frac{1}{2}$ και P(B)= $\frac{2}{3}$.

Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα, τότε P(AUB)=P(A)+P(B)= $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}>1$ το οποίο είναι αδύνατο, άρα τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

Άσκηση 26η

Η κατανομή των σχετικών συχνοτήτων των βαθμών 200 φοιτητων μιας Πανεπιστημιακής Σχολής οι οποίοι εξεταστηκαν επιτυχώς σε ένα μάθημα, δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Βαθμοί xi	5	6	7	8	9	10
Σχετική Συχνότητα fi	0,15	0,25	0,22	0,18	0,12	0,08

Α. Να υπολογίσετε πόσοι φοιτητές:
α. πήραν βαθμό ίσο με 6
β. πήραν βαθμό μικρότερο του 8
γ. Πήραν βαθμό τουλάχιστον 7
Β. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων
Γ. Να βρείτε την μέση τιμή των βαθμών.

Λύση

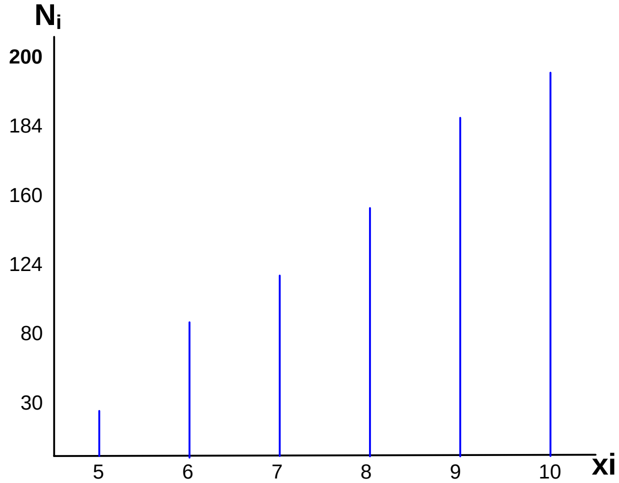
Αφού $f_i=\frac{v_i}{v}$ έχουμε $v_i=f_i\cdot v$. Οπότε:

v_1=200·0,15=30, v_2=200·0,25=50, v_3=200·0,22=44, v_4=200·0,18=36, v_5=200·0,12=24, v_6=200·0,08=16.

Βαθμοί x_i	**v_i**	**f_i**	**N_i**
5	30	0,15	30
6	50	0,25	80
7	44	0,22	124
8	36	0,18	160
9	24	0,12	184
10	16	0,08	200
Σύνολο	200	1	-

Α.
α. βαθμό ίσο με 6 πήραν v_2=50 φοιτητές
β. βαθμό μικρότερο του 8 πήραν $v_1+v_2+v_3$=124 φοιτητές
γ. βαθμό τουλάχιστον 7 πήραν $v_3+v_4+v_5+v_6$=120 φοιτητές

Β.



Γ. $\bar{x}=\dfrac{\Sigma x_i v_i}{v}=\dfrac{150+300+308+288+216+160}{200}=7{,}11$

Άσκηση 27η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-3)^2-1$. Να βρείτε σε ποιό σημείο της f, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ευθείας είναι ίσος με 2. Στην συνέχεια να βρείτε την τιμή του **γ** ώστε η ευθεία y=2x+γ να εφάπτεται στην f, στο σημείο που βρήκατε πριν.

Λύση

Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το ζητούμενο σημείο. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της f στο σημείο Μ είναι $\lambda=f'(x_0)$ και αφού ισούται με 2, $f'(x_0)=2$.
Επειδή $f'(x)=2(x-3)$ έχουμε $f'(x_0)=2$ ή $2x_0-6=2$ ή $x_0=4$.
Η τεταγμένη του σημείου Μ θα είναι: f(4)=0
Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το Μ(4,0).
Για να εφάπτεται η ευθεία y=2x+γ στην f στο σημείο Μ(4,0) πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου να επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή
$0=2\cdot 4+\gamma$ άρα γ=-8

Άσκηση 28η
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x+2)^2+1$
α. Να μελετήσετε την παραπάνω συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f, στο σημείο A(-1,f(-1))
γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη και τους άξονες xx' και yy'.

Λύση
α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = 2(x+2)$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'(χ)	-		+
f	↘		↗

Η f είναι
γνησίως φθίνουσα στο ($-\infty$,-2]
γνησίως αύξουσα στο [-2, $+\infty$)
παρουσιάζει ελάχιστο στο -2
β. Έστω y=λx+β η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας.
Είναι $λ=f'(x_0)=f'(-1)=2$
Οπότε η εξίσωση γίνεται y=2x+β.
Η τεταγμένη του σημείου επαφής είναι f(-1)=2. Επομένως A(-1,2).
Οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης, άρα:
2=2·(-1)+β ή β=4
Η εφαπτομένη της f στο σημείο A(-1,2) θα έχει εξίσωση y=2x+4.

γ. Βρίσκουμε τα σημεία τομής της ευθείας y=2x+4 με τους άξονες xx' και yy'.
Για τον xx' θέτουμε y=0 και έχουμε: 0=2x+4 ή x=-2. Άρα το σημείο είναι το B(-2,0)
Για τον yy' θέτουμε x=0 και έχουμε: y=4. Άρα το σημείο είναι το Γ(0,4)

Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη και τους άξονες xx' και yy' θα είναι $E = \frac{|OB \cdot O\Gamma|}{2} = \frac{|-2 \cdot 4|}{2} = 4$ τ.μ.

Άσκηση 29η
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=αx^3-3βx^2+24x-2$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β, ώστε η συνάρτηση f να έχει ακρότατα στα σημεία x=2 και x=4. Στην συνέχεια να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία – ακρότατα.

Λύση
Εφόσον η συνάρτηση f έχει ακρότατα στα σημεία 2 και 4, θα πρέπει
f'(2)=0 και f'(4)=0. Είναι $f'(x)=3αx^2-6βx+24$.
$f'(2) = 0 \Leftrightarrow 3a2^2 - 6\beta 2 + 24 = 0 \Leftrightarrow 12\alpha - 12\beta + 24 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = -2$ (1)
$f'(4) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha 4^2 - 6\beta 4 + 24 = 0 \Leftrightarrow 48\alpha - 24\beta + 24 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - \beta = -1$ (2)
Αφαιρώντας κατα μέλη τις (1) και (2) έχουμε: α=1 και αντικαθιστώντας στην (1) ή την (2) προκύπτει β=3.
Άρα η συνάρτηση γράφεται: $f(x)=x^3-9x^2+24x-2$
Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
f'(x)	+	-	+	
f	↗	↘	↗	
		ΤΜ	**ΤΕ**	

Η f είναι:
Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,2]$ και στο $[4, +\infty)$
Γνησίως φθίσουσα στο [2,4]
Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 2 ίσο με f(2)=18, και τοπικό ελάχιστο στο 4, ίσο με f(4)=14

Άσκηση 30η
Δύο φίλοι Α και Β λύνουν ένα πρόβλημα μαθηματικών. Η πιθανότητα να το λύσει τουλάχιστον ένας από τους δύο είναι $\frac{3}{4}$, ενώ η πιθανότητα να το λύσουν και οι δύο είναι $\frac{1}{4}$. Αν η πιθανότητα να μην λύσει το πρόβλημα ο Α είναι 2/3 να υπολογιστεί:
α. Η πιθανότητα να μην λύσει το πρόβλημα ο Β
β. Η πιθανότητα να λύσει το πρόβλημα μόνο ο Β
γ. η πιθανότητα να λύσει το πρόβλημα μόνο ο Α ή μόνο ο Β

Λύση
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
Α={ο Α λύνει το πρόβλημα των μαθηματικών} και
Β={ο Β λύνει το πρόβλημα των μαθηματικών}
Είναι $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$. Επίσης $P(A')=\frac{2}{3}$

α. Ζητείται η πιθανότητα P(B'). Αφού $P(A')=\frac{2}{3}$ τότε $P(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.
Είναι $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ άρα $P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B)$ ή
$P(B)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$

β. $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

γ. Είναι $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

Ζητείται η $P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A-B)+P(B-A)=\frac{1}{12}+\frac{5}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

Άσκηση 31η
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2-3x+\frac{1}{2}$.
α. Να βρείτε τους αριθμούς α, β για του οποίους ισχύει $f'(-1)=f'(1)=0$
β. Αν α=1 και β=0, τότε να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f.

Λύση
α. Η παράγωγος f'(x) της f, είναι $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x-3$
$f'(-1)=0$ οπότε $3\alpha-2\beta-3=0$ (1) και
$f'(1)=0$ δηλαδή $3\alpha+2\beta-3=0$ (2)

Προσθέτωντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε 6α-6=0 δηλαδή α=1
Και αντικαθιστώντας α=1 σε μία από τις (1) και (2) έχουμε β=0
β. Η $f(x)=3x^2-3$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=6x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-		+
f	$\searrow$		$\nearrow$

Στο $(-\infty,0]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και στο $[0,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.
Στο σημείο 0 η f παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με f(0)=-3